Cómo calcular la distancia Tierra-Sol gracias al Tránsito de Venus

Francisco Berthomieu, Frédéric Dahringer, Rainer Gaitzch, Michèle Gerbaldi, Alan Pickwick y Rosa M. Ros*

Nivel

Se requieren algunas nociones de matemática

Objetivos

- Medir la distancia Tierra-Sol con las observaciones del tránsito de Venus a partir de dos lugares en la Tierra situados en el mismo meridiano. Es posible calcular la distancia Tierra-Sol a partir de observaciones tomadas a partir de dos lugares con diferentes longitudes, pero la matemática es mucho más difícil.
- Entender una versión muy simplificada basada en la primera medición realizada en el siglo XVIII. (Los datos de observación de 1769 se pueden utilizar para obtener un resultado numérico).

Supuestos

Con el fin de ofrecer un método accesible para estudiantes de secundaria se asume que:

a) los dos puntos de observación, sus proyecciones sobre la superficie solar y el centro de la Tierra, el Sol y Venus están en el mismo plano.
b) las órbitas de Venus y de la Tierra alrededor del Sol son circulares. (Un modelo tridimensional explica estos supuestos de manera sencilla).

Antecedentes

Tras haber considerado los supuestos anteriores, los estudiantes tienen que saber solamente:

Contenido matemático

La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a 180 grados.
Definición de los senos y de las tangentes
Proporciones directas
El teorema de Pitágoras (opcional)

Contenido astronómico

La tercera Ley de Kepler
Definición de la paralaje horizontal

Materiales necesarios

Regla
Calculadora

Recursos

Un modelo tridimensional

Introducción

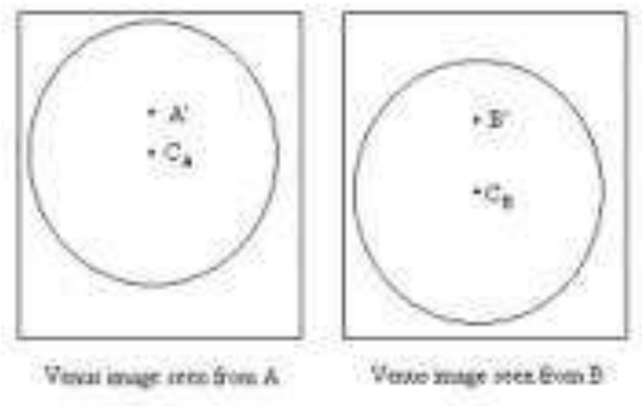
Sir Edmond Halley impulsó las campañas científicas de observación para los tránsitos de Venus en 1761 y 1769 mientras Jean-Nicolas Delisle recogió todos los resultados. Utilizaremos estas observaciones para calcular la distancia Tierra-Sol con un método simplificado para observadores localizados en el mismo meridiano. Los observadores estaban situados en latitudes lo más distantes posible, para mejorar la precisión de los cálculos.

El método utilizado aquí es una versión simplificada del que Edmond Halley usó en el siglo XVIII.

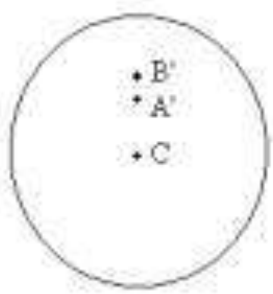
A menudo, los sitios de observación escogidos se encontraban en lugares muy remotos y los viajes en aquella época eran peligrosos debido a revuelos y guerras entre naciones, como se dio el caso en el Océano Índico, donde Inglaterra y Francia estaban luchando. Cabe destacar que el tránsito del 1761 fue la primera ocasión cuando se organizó una campaña científica a nivel internacional. Ésta involucró a más de 130 diferentes expediciones en todo el mundo. En 1769, hubo observadores en Pondichery en Madrás, en Santo Domingo en las Indias Occidentales, en San José del Cabo, en la Baja California, en la bahía de Hudson en Canadá, en Papeete en Tahití, en Vardö en Laponia, en Cajanebourg en la península de Kola y en Iakutsk en Siberia. En total, hubo 151 observadores en 77 lugares diferentes. Todas las expediciones se enfrentaron a varios problemas, algunos de ellos muy complicados, y los resultados no siempre estuvieron a la altura de las expectativas.

Observaciones desde la Tierra

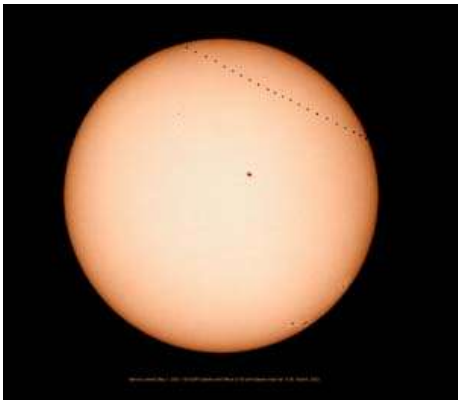
Consideremos dos observadores en la Tierra situados en lugares A y B en la misma longitud (meridianos), pero en latitudes muy distintas. Venus se ve como un pequeño disco contra el Sol en los dos puntos A' y B'. Esto ocurre porque las líneas de visión de A y B hacia Venus son diferentes.



Al juntar las dos observaciones es posible medir el desplazamiento paraláctico. Tras superponer los dos centros del Sol en C, la separación de A' y B' es la distancia entre las dos posiciones de Venus observadas simultáneamente desde A y B.



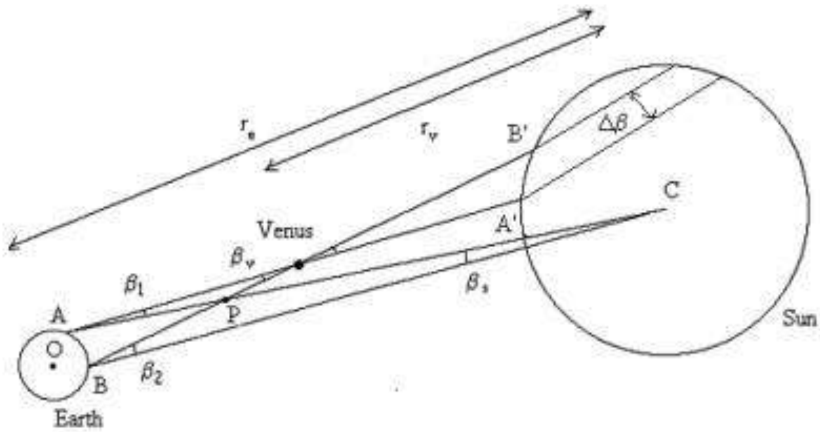
Si observamos el movimiento de Venus durante todo el tránsito podemos dibujar el lugar de sus posiciones durante la observación completa. Si observamos desde los lugares A y B obtendremos dos líneas paralelas, una para cada lugar. La separación de las líneas representa el desplazamiento paraláctico Δβ.



Composición de varias fotos del tránsito de Mercurio, 07 de mayo 2003

¿Cómo medir la distancia Tierra-Sol?

Vamos a considerar el plano definido por tres puntos: el centro de la Tierra O, el centro del Sol C y el centro de Venus V. Si los dos observadores están en el mismo meridiano en los lugares A y B, sus imágenes de Venus están en los puntos A' y B' de la superficie del sol. (En realidad, los centros de la Tierra, de Venus y del Sol no están en el mismo plano que se puede ver en el modelo, pero esta hipótesis nos permite simplificar el problema matemático).



Los triángulos APV y BPC tienen los mismos ángulos exteriores en P y ya que la suma de sus ángulos es igual,

$\beta v + \beta 1 = \beta s + \beta 2$

por lo tanto

$\beta v - \beta s = \beta 2 - \beta 1 = \Delta\beta$

donde el ángulo Δβ mide la separación de las diferentes posiciones de la trayectoria de Venus sobre el disco del sol. Reorganizando la ecuación anterior da

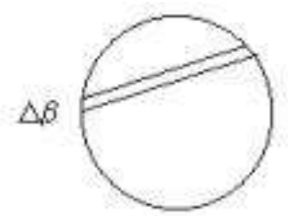
Δβ = βs ((β v / s β) - 1)

Sea r e la distancia Tierra-Sol y r v la distancia Venus-Sol. Entonces la paralaje de Venus será β v = AB / (re - rv) y la paralaje del Sol β s = AB / r e, por lo tanto, el cociente β v / βs = r e / (r e – r v). Sustituyéndolo en la ecuación anterior se obtiene:

Δβ = βs ((re / (re - rv)) - 1) = βs / rv (re - rv)

En particular, podemos obtener la paralaje solar

βs = Δβ ((r e / r v) - 1)



Nótese que Δβ es el desplazamiento paraláctico, es decir la separación de las dos líneas.

Podemos calcular la razón r v / r e utilizando la tercera ley de Kepler, ya que sabemos que los periodos de revolución de Venus y de la Tierra son de 224,7 y 365,25 días, respectivamente.

(r e / r v) 3 = (365,25 / 224,7) 2

por lo tanto

r e / r v = 1,38248

Usando este resultado en la relación de la paralaje solar, se obtiene

β s = Δβ ((re / rv) - 1) = Δβ (1,38248 a 1)

por lo tanto

β s = 0.38248 Δβ

Y, por último, utilizando la definición de paralaje, la distancia de la

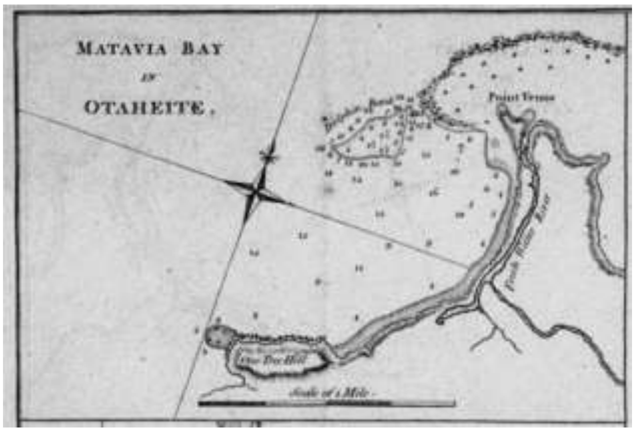
Tierra al Sol r e es

r e = AB / βs

Así que tenemos que encontrar la distancia AB entre los dos observadores y medir Δβ desde los datos de observación del tránsito.

Las observaciones de 1769

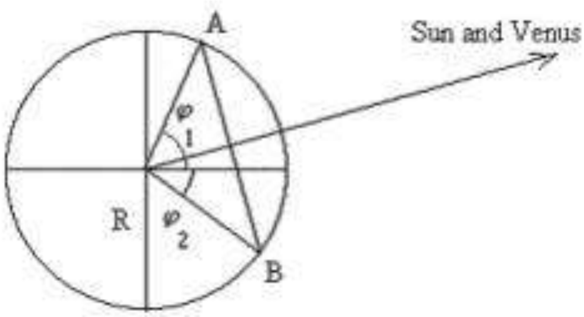
Con el fin de demostrar cómo se calculan los resultados, utilizaremos las observaciones de la campaña de 1769 publicadas en "Historia de la Astronomía" de A. Pannekoek. El libro muestra dibujos y tablas con los tiempos de contacto registrados en varios lugares en 1761 y 1769. Utilizaremos las observaciones de 1769 de Vardö (Laponia) y Papeete (Tahití) para la demostración.



El punto Venus en Tahití fue así llamado en este momento

1) La distancia entre los observadores en los lugares A y B

La distancia AB se puede deducir de las latitudes de los dos lugares de observación. En el diagrama, φ 1 y φ 2 son las latitudes de A y B, y R es el radio de la Tierra.



En el triángulo rectángulo que divide el triángulo isósceles RAB

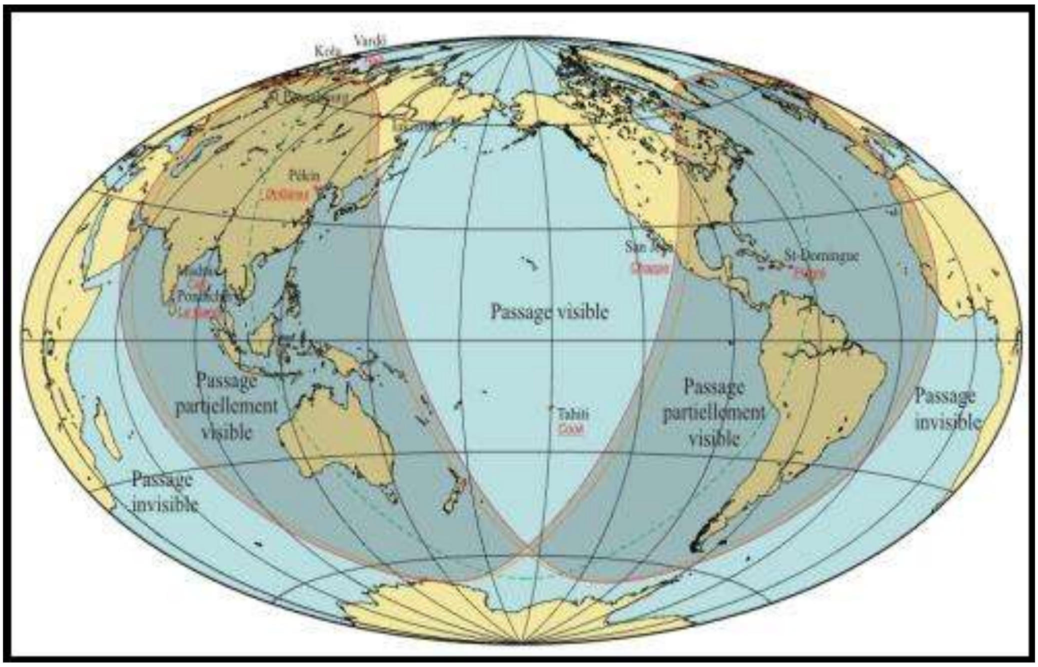
$\text{sen } ((\varphi\ \varphi\ 1 + 2) / 2) = (AB / 2) / R$

Entonces la distancia AB es

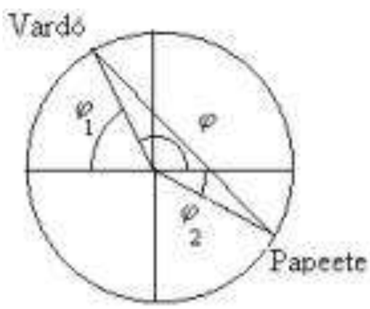
$AB = 2\ R \text{ sen } ((\varphi\ 1 + \varphi\ 2) / 2)$

¡Ten cuidado! Si las dos ciudades se encuentran en el mismo hemisferio, el ángulo es $(\varphi 1 - \varphi 2) / 2$ y además la situación geométrica cambia si las ciudades se encuentran en diferentes longitudes.

Utilizaremos las observaciones del 1769, en particular las de Vardö y Tahití, que se encontraban en la zona visible. Cabe destacar que el sol de medianoche se hizo visible en Vardö.



Vardö (Laponia) y Papeete (Tahití) se encuentran en la misma longitud (meridianos) y sus latitudes son 70 ° 21 'N y 17 ° 32' S.



Entonces la geometría del problema cambia y el nuevo ángulo φ a considerar es

$\varphi = (90 - \varphi\ 1) + 90 + \varphi\ 2 = 127°\ 11'$

y utilizando el radio de la Tierra R = 6378 kilómetros, calculamos

$AB = 2\ R\ \mathrm{sen}\ (\varphi / 2) = 11425$ kilómetros

2) Distancia Δβ entre dos pasajes observados de Venus

A fin de calcular Δβ por medición directa, se mide el diámetro del Sol D, y la separación Δβ entre los dos trayectos, es decir A'B', sobre un dibujo o una fotografía. El diámetro angular del Sol, visto desde la Tierra, es de 30 '(minutos de arco o ° 30/60). Por medio de simple proporción, la separación de los trayectos se relaciona con el diámetro del Sol así:

$\Delta\beta / 30' = A'B' / D$

entonces

$\Delta\beta = (30') (A'B' / D)$

pero la fórmula requiere que el diámetro angular del Sol se exprese en radianes. Por lo tanto

$\Delta\beta = (30\ \pi / 10800) (A'B' / D)$

$\Delta\beta = (\pi / 360) (A'B' / D)$

Al medir directamente la distancia entre las líneas rectas 1 y 3, se obtiene Δβ = 1,5 mm y el diámetro en el dibujo es D = 70 mm, por lo tanto,

$\Delta\beta = (\pi / 360) (1.5 / 70) = 0{,}00019$ radianes

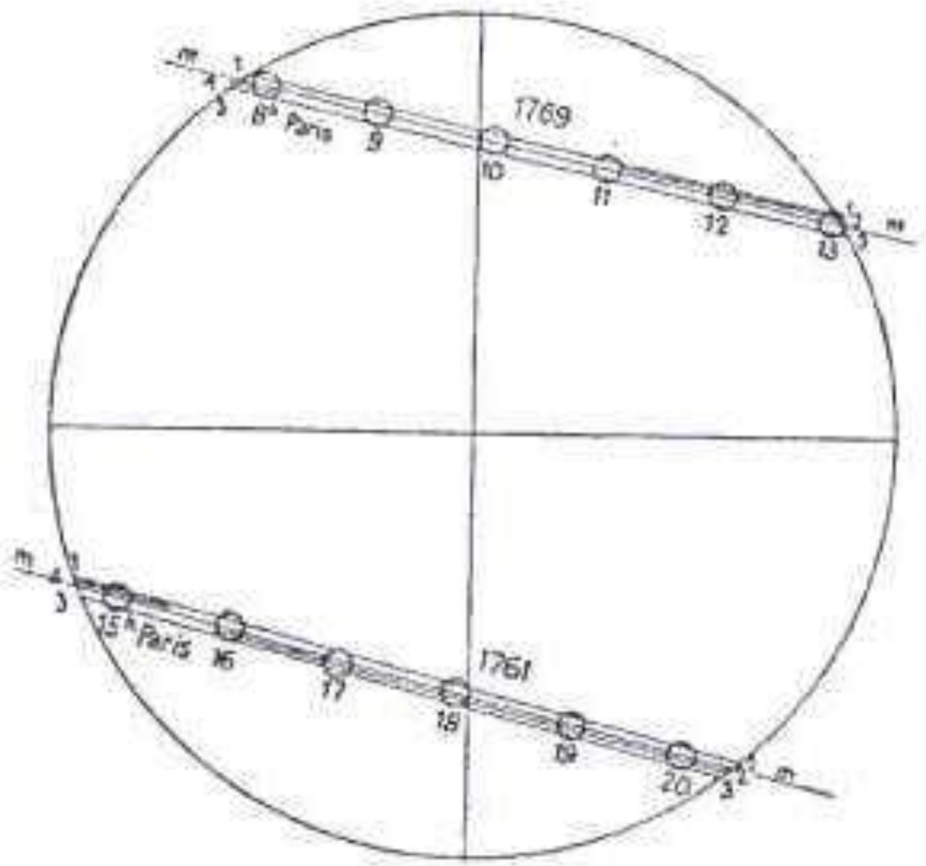
Si medimos Δβ directamente, se introduce un error porque no es fácil de medir la separación entre las dos líneas. (Conociendo el teorema de Pitágoras se puede utilizar un método más preciso).

Empleando la paralaje solar, tenemos

$\beta_s = 0.38248\ \Delta\beta$

y según la fórmula de paralaje, la distancia de la Tierra al Sol r_e es

$r_e = AB / \beta_s$



Transit of Venus across the solar disc
m – track of the planet by its central point
1761: 1. Rodrigues 2. Paris 3. Tobolsk 4. Tahiti
1769: 1. Tahiti 2. Batavia 3. Vardö 4. Paris

Utilizando los datos de las expediciones de 1769 se puede calcular el valor de re
r e = 157 106 km

Se sabe que el valor de la distancia Tierra-Sol es r e = 149,6 106 km. Es posible obtener mejores resultados con mediciones más precisas de Δβ.

Referencias

http://www.eso.org/public/outreach/eduoff/vt-2004/Education/EduSheet3.html

*Material realizado por miembros de EAAE para el Tránsito de Venus de 2004
www.eaae-astronomy.org